¿Qué es lo que Dios hizo? Escueta historia de los números desde Adán hasta hoy (3ra y última parte)

Oscar Pino Ortiz

Sociedad Boliviana de Ciencias
e-mail: opinoo@latinmail.com

"Ex cerebro, ex cerebro solum gignuntur voluptates, gaudia, risus facetiæquæ ita ut dolores et ægritudines"
Hippocrates [1]

Resumen

Continuamos contando la manera en que Dios se las arregló con el hombre para hacerle creer que tuvo participación en la sabia construcción del universo, logrando así levantarle la autoestima e inducirle a comprender la obra de su divina creación. Esto, en cuanto a los números se refiere.

La juventud

Si durante el milenio de la edad media el hombre puso su fe por sobre todas las cosas, el renacimiento descubrió la confianza que tenía el divino Creador en el hombre. A través de Leonardo da Vinci, de Michel Angelo Buonarotti, de Raphael, de Bramante, de Boticelli, de Fra Angelico, de Cellini y de tantos otros, Dios nos empujó de poco en poco, de tanto en tanto, a tener el coraje de emprender el vuelo. Lo hicimos no sin antes confundir su respeto por nuestro albedrío con el derecho a sentirnos el centro del universo. Pero volamos, volamos tan alto como pudieron impulsarnos las alas de nuestra imaginación y la energía de nuestras convicciones.

Mientras unos íbamos allende el mar atisbando sobre la cresta nacarada de las olas las costas virginales de la lejana India, otros navegábamos por el extenso mar de los complejos descubriendo misteriosas raíces para los polinomios de discriminante negati-

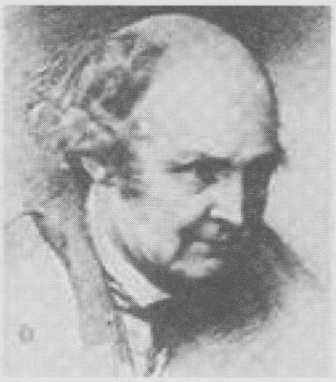
[1] Del cerebro y sólo del cerebro surgen los placeres, las alegrías, las risas y las bromas, así como el dolor y la amargura. Hipócrates.

vo. Y todos estábamos seguros que de nuestras laberínticas circunvoluciones cerebrales surgiría la respuesta a todas las preguntas y la razón de todas las verdades. Blandiendo entonces, como una espada de portentoso fuego, el pequeño y tremulante candil de nuestra inteligencia, nos adentramos en la infinita noche con la intención de develarla toda. Dios, refugiado en la inocente mirada de los niños, observaba sereno.

Con de Moivre, Cauchy y Riemann no tuvimos dudas sobre la idéntica naturaleza numérica de reales e imaginarios. Dándoles el giro polar que al parecer ameritaban con preferencia, establecimos sus potencias, sus raíces n-ésimas y sus inversos. Luego extendimos las funciones reales (que tanto bien hicieron a nuestro entendimiento de las cosas) al mundo de los complejos para, ¡oh grata maravilla!, descubrir que ellas se adaptaban tan bien a su nueva natura que casi todas sus propiedades se conservaban incólumes y verdaderas. Además aparecían otras que, a la cual más y mejor, nos llenaban de asombro por su belleza y generalidad. Con Euler, a quien sólo un ojo bastaba para ver más allá de nuestro tiempo, develamos una relación numérica que durante longos e incontables siglos había permanecido secreta:

$$e^{i \cdot \pi} + 1 = 0$$

Al verla, tuvimos la sensación de estar penetrando en el sacro centro misterioso de la aritmética, atrapando *in fraganti* a los cinco números fundamentales (e, i, π , 1 y 0) en un milenario contubernio. ¿Quién hubiese podido entonces decir que, en consecuencia, no fue normal el preguntarnos, una vez más, lo que era un número? Habiendo penetrado sus tan sorprendentes universos, un poco por azar y sin permiso, era tiempo de interrogarnos sobre si no existían otros números aún más asombrosos. Oh, sí, deseábamos encontrarlos aunque para ello no fuere ya menester que sean útiles. Caminamos entonces los unos y los otros cavilando la forma adecuada que los habitantes misteriosos de las nuevas dimensiones hubieran de tener hasta que, cruzando el puente Brougham de la vieja Irlanda, William Rowan Hamilton (1805-1865) se apartó un momento de nuestra compañía para grabar las relaciones $i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$. Había encontrado la puerta de acceso al maravilloso mundo de los cuaterniones [2].



Aunque para ello, hubimos de conceder la no conmutatividad del producto, el descubrimiento de una estructura numérica superior a la de los complejos alimentó de generosos sueños el optimismo intrépido de muchos jóvenes matemáticos. Acompañando a **Arthur Cayley** [3]. (1821-1895), Kart Weierstrass (1815-1897), Leopold Kronecker

[2] Los cuaterniones forman un cuerpo no conmutativo, es decir una estructura algébrica similar a la de los reales o complejos, excepción hecha de la conmutatividad de la multiplicación que no se cumple en el caso de los cuaterniones. Por tal motivo también se dice que los cuaterniones forman un cuerpo izquierdo (corps gauche) o un campo (field) a secas. Su dimensión como espacio vectorial real es 4

[3] Las octavas de Cayley, copiadas sobre el modelo de los cuaterniones, revelaron que el deseo de

(1823-1891) y Richard Dedekind (1831-1916), nos lanzamos todos sin temor al estudio profundo de las álgebras con la firme voluntad de disectarlas hasta encontrar su esencia.

Las Octavas fueron llamadas así por Richard Hamilton. En efecto, un amigo suyo John T. Graves las descubrió independientemente de Arthur Cayley en 1843. Sin embargo este último fue el primero en publicar un artículo sobre ellas en 1845. Las octavas, que también se conocen bajo el nombre de *octoniones* y se simbolizan por O, forman un espacio vectorial de dimensión 8 sobre los reales. Una base de este espacio está formada por los vectores **1, i, j, k, l, m, n, ñ** los cuales están provistos de una multiplicación que induce una estructura de álgebra normada e íntegra sobre O. La multiplicación mencionada es la siguiente:

*	1	i	j	k	l	m	n	ñ
1	1	i	j	k	l	m	n	ñ
i	i	-1	k	-j	-m	l	-ñ	n
j	j	-k	-1	i	-n	ñ	l	-m
k	k	j	-i	-1	-ñ	-n	m	l
l	l	m	n	ñ	-1	-i	-j	-k
m	m	-l	-ñ	n	i	-1	-k	j
n	n	ñ	-l	-m	j	k	-1	-i
ñ	ñ	-n	m	-l	k	-j	i	-1

Los octoniones contienen naturalmente a los cuaterniones y por ende a los complejos. Lastimosamente la multiplicación no es asociativa, lo que disminuyó el interés en su estudio hasta que se descubrió su nexo con las álgebras de Lie.

Pero repentinamente, creyendo haber sucumbido a las veleidades de nuestra algarabía y sacudidos por el motor de una dialéctica desenfrenada, llegamos a dudar de la naturaleza numérica de los irracionales y, temiendo por la pureza de tal ciudadanía, expulsamos del mundo de los números a todos aquellos sospechosos de haberse arrogado tan preciosa condición aprovechando nuestra ingenua magnanimidad. Nombramos a Leopoldo Kronecker, grande entre los grandes aunque pequeño de estatura, nuestro santo inquisidor con cuyo apoyo comenzamos a desterrar sin pena ni contemplaciones a todos los intrusos. Cuando la terrible tarea terminó, sólo quedaban los números naturales. Ellos lamentablemente eran manifiestamente insuficientes para explicar y construir la belleza y la armonía del universo, por lo que no tuvimos otra alternativa que pensar en reabrir las fronteras para todos aquellos candidatos que presenten pruebas de un parentesco estrecho (descendencia numérica directa) de los bienamados naturales. Arrepentidos de nuestra impía intolerancia, solicitamos la renuncia de Kronecker, quien no sólo se resistió a ello sino que además y por demás exhibió pruebas, aparentemente contundentes, de que su labor era buena. Para mostrar que el imaginario i era un infiltrado, por ejemplo, tomó un campo conmutativo K, consideró el álgebra $K[x]$ en una variable y el conjunto cociente de este álgebra por el ideal (x^2+1). Mostró entonces que la clase $[x]$, elemento del álgebra cociente, poseía la propiedad de ser una raíz cuadrada de -1, si por ello se entiende (lo que no podíamos ni podemos negar) que $[x]^2+[1]=[0]$. Confusos, no tardamos en tomar la decisión irrevocable de construir un ámbito nuevo en el que el concepto de número no tenga ambigüedad alguna, un escenario amplio en el

construir un supra cuerpo que contenga a los cuaterniones jamás sería satisfecho. En efecto, la imprescindible propiedad de la asociatividad de la multiplicación fallía, y por lo tanto su débil estructura no era la pretendida.

que quepan holgadamente las ideas de Kronecker, las de Lindemann [4] y las de Cantor.

Una de las motivaciones que sustentó la pasión, que tantos de nosotros experimentamos al buscar un nuevo escenario numérico extendido, fue, sin duda alguna, el desafío que representaba demostrar el último teorema de Pierre de Fermat (1601-1665)[5]. En realidad, dicho en voz baja, para no pecar de impertinentes, poco nos importaba ya el mismo teorema, dichosos como estábamos de descubrir, día tras día, tantos y nuevos espacios en los que nuestra intuición se dedicaba a hacernos jugarretas induciéndonos a errores que evitábamos o en los que caíamos para denunciarlos luego[6]. Los seres humanos habíamos, ya antes, descubierto con algarabía el placer de indagar enigmas inconcebibles, enunciables sólo en mundos nacidos de nuestra fantasía: las geometrías no euclidianas. En efecto, tanto Carl Fiedrich Gauss como Nikolai Lobachevsky, János Bolyai y luego Benhard Riemann, modificando un axioma o suprimiéndolo, abrieron ventanas hacia mundos desconocidos. Desde ellas nos contemplamos a nosotros mismos, pues Albert Einstein nos hizo saber, un tanto después, que lo aparente no era lo real y que la ventana de Riemann no era más que un espejo[7].

Pero más allá de las nuevas estructuras que brotaban ante nuestros ojos como las estrellas cuando en la noche se despeja el cielo, fuimos poco a poco comprendiendo que podíamos edificar el mundo numérico como un andamiaje extenso y coherente. Emprendimos entonces la construcción axiomática de los números.

La Madurez

Con Giuseppe Peano (1858-1932) a la cabeza, recogimos cuidadosamente el legado de los unos y los otros. Definimos los números naturales N como el conjunto infinito más pequeño[8] para el cual existe una aplicación inyectiva no sobreyectiva $s : N \longrightarrow N$ tal que $Im(s) = N - \{0\}$, donde **0** representa a su primer elemento (otros prefieren considerar el **1** como primer elemento, pero esa disidencia no es relevante) cuya existencia es

[4]Ferdinand von Lindemann fue el primero en mostrar que π es trascendente.

[5]Un desafío que Gauss no relevó pues, como es de dominio público, para él la imposibilidad de escribir la potencia n-ésima de un entero como suma de dos potencias n-ésimas no nulas, no tenía atractivo alguno. En verdad, muchos desafíos semejantes pueden ser formulados en la Teoría de Números sin constituirse por lo tanto en hitos de la Historia de la Matemática como le ocurrió a la famosa conjetura de Fermat.

[6]En el anillo $Z[\sqrt{6}]$, el número natural 15 admite dos descomposiciones diferentes en producto de números primos. Para verlo basta con recordar que $15 = 3 \cdot 5$ (donde 3 y 5 son números primos), observar que $15 = (3 + 2 \cdot \sqrt{6}) \cdot (-3 + 2 \cdot \sqrt{6})$ y que sin embargo ni 3 ni 5 dividen los factores de la segunda descomposición. Esto significa que el teorema fundamental de la aritmética no es válido en $Z[\sqrt{6}]$.

[7]Nuestro universo en realidad se asemejaría más a S^3 (esfera de dimensión 3, subespacio de R^4) por lo que localmente la percibimos como un espacio de dimensión 3 ya que, para cada punto de la esfera S^3, existe una vecindad homeomorfa a R^3. S^3 está naturalmente provista de una geometría no euclidiana.

[8]Decimos que un conjunto X es infinito si podemos encontrar una aplicación de X en X, inyectiva pero no sobreyectiva. Estando dados dos conjuntos X e Y, diremos que X es de cardinalidad "menor o igual" a la cardinalidad de Y si existe una aplicación inyectiva de X en Y. Contrariamente a lo que se podría suponer, mostrar que esta relación es transitiva no es evidente. Gracias a George Cantor y Felix Bernstein sabemos que es así.

garantizada por la infinitud de N. Mostramos que gracias a s podemos definir por recurrencia una adición y una multiplicación[9] en N. Gracias a esta estrategia pudimos demostrar que tales operaciones gozan de las propiedades que todos conocemos.

Enseguida definimos el conjunto de los enteros Z como el cociente de $N \times N$ por la relación de equivalencia $(n;m) \approx (p;q) \Leftrightarrow n+q = m+p$. No fue difícil entonces que, de manera sencilla y hermosa, mostremos que Z es un *anillo conmutativo íntegro* que "contiene"[10] a N. Aquí, se bifurca el camino. Por un lado nos interesamos en los útiles enteros módulo n, cuyo conjunto Z_n, es definido como el cociente de Z por la relación de equivalencia $r \approx s \Leftrightarrow \exists k \in Z | r - s = k \cdot n$. Por otro lado definimos Q usando la misma técnica que en el caso de Z. Tomamos $Z \times Z^*$ (con $Z^* = Z - \{0\}$) y consideramos el cociente de este conjunto por la relación de equivalencia $(a;b) \approx (c;d) \Leftrightarrow a \cdot d = b \cdot c$. Sin tropiezos pudimos entonces mostrar que Q, así construido, es un *cuerpo* (o *campo conmutativo* en la terminología anglo-sajona)[11].

En este punto encontramos una nueva bifurcación provocada por la búsqueda de la completitud de Q. Por un lado Dedekind y Cantor nos indicaron, cada uno a su manera[12], pero utilizando ambos la norma arquimediana valor absoluto, cómo completar la recta racional, definiendo, de tal modo, R. Los irracionales, como parte de los reales, mostraban así su linaje numérico. Por fin π y e podían recorrer las innumerables avenidas de la Teoría de Números y del Análisis seguros de estar en casa. Por otro lado, siguiendo las ideas de Weierstrass, **Kurt Hensel** (1861-1941) nos empujó a usar una norma no-arquimediana, astutamente concebida [13], para completar Q, obteniendo así un cuerpo diferente a R formado por los llamados números p-ádicos. Poco después Helmut Hasse (1898-1979) justificó plenamente la importancia y la ciudadanía numérica de los cuerpos p-ádicos al demostrar el principio local-global de las formas cuadráticas sobre los mismos[14].

Con el placer que produce un trabajo bien hecho, orgullosos de la inteligencia humana, nos dedicamos finalmente a completar la construcción axiomática de los números construyendo el conjunto de los complejos C. Para ello tomamos $R \times R$ y definimos de-

[9] Las fórmulas de recurrencia son las siguientes: $0 + m = m$ y $s(n) + m = s(n+m)$ para la adición y $0 \cdot m = 0$ y $s(n) \cdot m = n \cdot m + m$ para la multiplicación

[10] En realidad contiene un subconjunto isomorfo a N.

[11] Nótese que la construcción de Q a partir de Z puede ser generalizada tomando como base un anillo A conmutativo íntegro cualquiera. El cuerpo construido se denomina cuerpo de fracciones de A.

[12] Dedekind a través de las cortaduras y Cantor considerando un cociente del conjunto de las sucesiones de Cauchy a valores racionales.

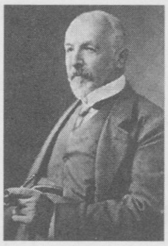
[13] Sea p un número natural primo. Dado un entero $r \in Z$ definimos la función $v : Z \longrightarrow N$ por $v(r) := max\{n \in N | p^n \; divide \; r\}$. Extendemos v a los racionales definiendo $v(\frac{r}{s}) := v(r) - v(s)$ para terminar definiendo la función $\| \; \|_p : Q \longrightarrow R^+$ por $\|a\|_p := \frac{1}{p^{v(a)}}$ para $a \in Q$.$\| \; \|_p$ es una norma no arquimediana.

[14] Una forma cuadrática que representa 0 no trivialmente sobre los números p-ádicos, para todo primo p, y sobre R, representa 0 no trivialmente sobre Q.

licadamente sobre sus pares una adición, $(a;b)+(c;d)=(a+c;b+d)$, y una multiplicación,$(a;b)\cdot(c;d)=(ac-bd;ad+bc)$. Si R es maravilloso pues es el único cuerpo ordenado y completo (salvo isomorfía), C también lo es pues, aunque perdimos la compatibilidad del orden con la estructura de cuerpo, ganamos la cerradura algébrica.

Sentimos entonces que habíamos terminado bellamente una línea de extensiones naturales. Los cuateriones y octoniones se añadieron al todo como una cereza apetitosa sobre un delicioso pastel[15].

Empero, cuando festejábamos estrepitosamente el fin de nuestras penas, llegó **Georg Cantor** (1845-1918) trayendo consigo, bajo el brazo, los números transfinitos y un nuevo desafío para el entendimiento ... [16]



Entonces Jehová llevó a Abraham fuera de la tienda y le dijo: "Mira ahora los cielos y cuenta las estrellas, si es que las puedes contar..."[17]

(fin)

Referencias

[1] A.J. Baker. *An introduction to the p-adic numbers.* U. of Glasgow, Scotland, 2005.

[2] E. T. Bell. *Men of mathematics.* 1975.

[3] Nicolas Bourbaki. *Éléments d'Histoire de Mathématiques.* Hermann, 1974.

[4] O. Pino. *Construcción axiomática de los números.* Inédito, 2000.

[5] L. Rodríguez y O. Pino. *Irracionalidad y Trascendencia.* Inédito, 1993.

[15] Los sedeniones, superreales, hiperreales, surreales, bicomplejos e hipercomplejos son magníficas construcciones que aún no han logrado afincar su presencia en el ámbito de los números.

[16] No se ha dado una correspondencia ordenada entre los números y su aparición en la historia de los hombres. Ciertas fracciones han cohexistido con los números naturales antes de la aparición de los enteros negativos. El encuentro con los complejos ha precedido al contacto con los p-ádicos. π estuvo siempre por ahí, acompañándonos y azuzando nuestra curiosidad mientras que los $\aleph$ mantenían sobre sí un infinito halo de misterio. Poco a poco hemos construido una amistad que durará para siempre.

[17] Génesis, 15,5